# Corrigé du devoir surveillé de Mathématiques n°2.

Classe de HKBL. Lycée Michel Montaigne. Année scolaire 2016/2017.

5 novembre 2016

EXERCICE 1 $\exists n \geq 4, \exists m \geq 4, \quad n \leq m$ et $u_n > u_m$, que l'on peut aussi écrire sous la forme $\exists n_0 \geq 4, \exists m_0 \geq 4, \quad n_0 \leq m_0$ et $u_{n_0} > u_{m_0}$.

EXERCICE 2

1. Il s'agit de choisir 2 étudiants parmi 48 étudiants (un ensemble de deux étudiants : il n'y a pas d'ordre, pas de premier délégué et de deuxième délégué), donc $\binom{48}{2} = \frac{48\times 47}{2}$ possibilités.
2. 27 choix possibles pour choisir une déléguée fille, 21 choix possibles pour choisir un délégué garçon, donc $27 \times 21$ possibilité.
3. 48 choix possible pour choisir un délégué, 47 choix possible pour choisir un suppléant (le suppléant ne peut pas être le délégué), donc $48 \times 47$ possibilités (ici, il y a un ordre, il s'agit d'un couple "délégué-suppléant").
4. Choix d'un premier délégué : 48 possibilités, choix de son suppléant : 47 possibilités, choix d'un deuxième délégué : 46 possibilités, choix de son suppléant : 45 possibilités. Ainsi, si on considère que les couples sont ordonnés (un premier délégué et son suppléant, un deuxième délégué et son suppléant), il y a $48 \times 47 \times 46 \times 45$ possibilités. Mais en fait, ils ne sont pas ordonnés : il faut donc diviser par 2 (une même possibilité couples $(A, B)$ et $(C, D)$ a été comptée deux fois : premier couple $(A, B)$ et deuxième couple $(C, D)$ ainsi que premier couple $(C, D)$ et deuxième couple $(A, B)$). Il y a donc $\frac{48\times 47\times 46\times 45}{2}$ possibilités.

EXERCICE 3 $\begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq j \leq i \leq n \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i \end{cases}$

d'où, par interversion de sommes, $\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}1^j 1^{i-j} = \sum_{i=0}^{n}(1+1)^i = \sum_{i=0}^{n}2^i = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$, d'après la formule du binôme puis d'après la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$.

EXERCICE 4

1. (a) $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas car $1 + x^2 \geq 1 > 0$).

   (b) Par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, on a $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \geq 0,\ f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \geq 0$. $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) $\forall x \geq 0,\ f(x) - x = \frac{x^2}{1+x^2} - x = \frac{x^2 - x(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}(-x^2 + x - 1) \leq 0$ (et s'annule seulement pour $x = 0$). En effet, la fraction est positive et le polynôme $-X^2 + X - 1$ a un discriminant $\Delta < 0$ et est donc toujours du même signe, celui du coefficient dominant, c'est-à-dire négatif.
2. Pour $n = 0$ on a $u_0 = a > 0$ ; soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$, on a, en composant par $f$ croissante sur $\mathbb{R}_+$, $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 0$. D'où, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$
3. On a, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0,\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$. D'où $(u_n)_n$ est décroissante.
4. $(u_n)_n$ est décroissante minorée par 0 donc converge vers $l \geq 0$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, d'où, par passage à la limite et continuité de $f$, on a $f(l) = l$. 0 étant le seul point fixe de $f$, on a donc nécessairement $l = 0$.

EXERCICE 5

1. (a) ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit donc de montrer que $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

   $u_0 = b > 0$ d'où $u_0$ est bien défini et $u_0 > 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n$ bien défini et $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \frac{a}{u_n^2}$ est bien défini (le dénominateur ne s'annule pas) et $u_{n+1} > 0$ (car $a > 0$).

   On a donc par récurrence $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ d'où $(w_n)_n$ est bien définie.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{a}{u_n^2}\right) = \ln(a) - \ln\left((u_n)^2\right) = \ln(a) - 2\ln(u_n) = \ln(a) - 2w_n \quad (1)$.

   (c) On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant

   $\alpha = \ln(a) - 2\alpha \quad (2)$.

   On a donc $3\alpha = \ln(a)$ et donc $\alpha = \frac{\ln(a)}{3}$.

   De plus, en soustrayant $(1) - (2)$ on obtient l'équation $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - \alpha = -2(w_n - \alpha)$.

D'où $(z_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = w_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison $-2$, d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = (-2)^n z_0 = (-2)^n(w_0 - \alpha) = (-2)^n\big(\ln(u_0) - \alpha\big) = (-2)^n\big(\ln(b) - \alpha\big)$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = z_n + \alpha = (-2)^n\big(\ln(b) - \alpha\big) + \alpha = (-2)^n\big(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\big) + \frac{\ln(a)}{3}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(w_n) = \exp\left[(-2)^n\big(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\big) + \frac{\ln(a)}{3}\right]$
$= \exp\left[(-2)^n \ln(b)\right] \exp\left[-(-2)^n \frac{\ln(a)}{3}\right] \exp\left[\frac{\ln(a)}{3}\right]$
$= b^{(-2)^n} a^{-\frac{(-2)^n}{3}} a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \frac{b^{(-2)^n}}{a^{\frac{(-2)^n}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{b}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{(-2)^n}$.

**NB** $\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ a^b = \exp\big(b\ln(a)\big)$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \left[(-2)^{2k}\left(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\right) + \frac{\ln(a)}{3}\right]$
$= \left(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\right)\sum_{k=0}^n (-1)^{2k} 2^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{\ln(a)}{3}$.
Or $\frac{\ln(a)}{3}$ ne dépend pas de l'indice de sommation $k$ et la somme comporte $n - 0 + 1 = n + 1$ termes, de plus $(-1)^{2k} = 1$ et $2^{2k} = (2^2)^k = 4^k$. On a alors $S_n = \left(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\right)\sum_{k=0}^n 4^k + (n+1)\frac{\ln(a)}{3}$. Par somme des termes d'une suite géométrique de raison $4 \neq 1$, on obtient $S_n = \left(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\right)\frac{1-4^{n+1}}{1-4} + (n+1)\frac{\ln(a)}{3} = \left(\ln(b) - \frac{\ln(a)}{3}\right)\frac{4^{n+1}-1}{3} + (n+1)\frac{\ln(a)}{3}$.

**NB** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-\text{"terme d'après"}}{1-\text{"raison"}}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=0}^n u_{2k} = \prod_{k=0}^n \exp(w_{2k}) = \exp\left[\sum_{k=0}^n w_{2k}\right] = \exp(S_n) = \exp\left[\frac{4^{n+1}-1}{3}\ln(b)\right]$
$\exp\left[-\frac{4^{n+1}-1}{9}\ln(a)\right]\exp\left[\frac{n+1}{3}\ln(a)\right]$
$= b^{\frac{4^{n+1}-1}{3}} a^{-\frac{4^{n+1}-1}{9}} a^{\frac{n+1}{3}} = a^{\frac{n+1}{3} - \frac{4^{n+1}-1}{9}} b^{\frac{4^{n+1}-1}{3}}$
$= a^{\frac{3n+3-4^{n+1}+1}{9}} b^{\frac{4^{n+1}-1}{3}} = a^{\frac{4+3n-4^{n+1}}{9}} b^{\frac{4^{n+1}-1}{3}}$.

EXERCICE 6

1. $u_1 = 1 \geq 0$ d'où $u_1$ est bien défini et $u_1 \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n$ est bien défini et $u_n \geq 0$. On a alors $n + 1 + u_n \geq 0$. Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $R_+$ d'où $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ est bien défini. De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a $u_{n+1} \geq 0$.
D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est bien défini et $u_n \geq 0$.

**NB** Dans ce type de récurrence, il faut intégrer dans l'hypothèse de récurrence $u_n \geq 0$ (ou autre condition sur $u_n$) afin que, dans l'hérédité, $u_{n+1}$ soit à sont tour bien défini.

2. $u_1 = 1 \leq 2\sqrt{1} = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \leq 2\sqrt{n}$. Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a alors $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \sqrt{n+1+2\sqrt{n}}$.
Montrons l'inégalité (1) : $\sqrt{n+1+2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$.
On a (1) $\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{n+1+2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$
$\Leftrightarrow n + 1 + 2\sqrt{n} \leq 4(n+1)$ par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
On obtient donc (1) $\Leftrightarrow 0 \leq 2\sqrt{n} \leq 3n + 3 \Leftrightarrow 4n \leq (3n+3)^2 = 9(n^2 + 2n + 1) \Leftrightarrow 9n^2 + 14n + 9 \geq 0$ (2).
Or le polynôme $9X^2 + 14X + 9$ a pour discriminant $\Delta = 14^2 - 4 \times 9^2 = 4(7^2 - 9^2) < 0$. Ainsi, le polynôme n'admet pas de racine réelle et est donc toujours du même signe, celui de son coefficient dominant. Or $9 > 0$ d'où le polynôme est toujours positif.
D'où (2) est vérifiée d'où (1) aussi. D'où finalement $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1+2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$.
D'où, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \leq 2\sqrt{n}$.

3. D'après 1. et 2., on a $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$.
En divisant par $\sqrt{n} > 0$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq 2$. La suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée et majorée donc bornée.

4. **NB** Pour montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, il suffit de montrer que, si on peut diviser par $a_n$ (non nul à partir d'un certain rang), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{a_n} = 1$.

$\forall n \geq 2,\ \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.
Or $\forall n \geq 2,\ \frac{u_{n-1}}{n} = \frac{\sqrt{n-1}}{n}\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}$, on a $\left(\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\right)_{n\geq 2}$ bornée car $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ l'est. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (car, par puissance d'équivalent, $\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$). D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{n} = 0$ par produit d'une suite tendant vers zéro et d'une suite bornée. On a donc, par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1} = 1$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$ d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

**NB** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.
En effet, $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M|b_n|$ par multiplication par $|b_n| \geq 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |b_n| = 0$. On a donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n b_n| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.